**Для отчета по гранту РФФИ-РЖД 2013-2014**

**УТОЧНЕНИЕ ОРИЕНТАЦИИ ЛУЧА ЛАЗЕРНОГО СКАНЕРА  
ПРИ ЛИНЕЙНЫХ И УГЛОВЫХ КОЛЕБАНИЯХ**

Каркищенко А.Н.

Общая постановка задачи

В настоящее время к мониторингу инфраструктуры железнодорожного транспорта предъявляются высокие требования, что требует решения сложного комплекса технологических задач, возникновение которых обусловлено необходимостью

– с большой скоростью в автоматическом режиме определять пространственное положение и геометрические параметры пути, а также искусственных сооружений в полосе отвода железнодорожного пути;

– ситуационно управлять частотой и качеством мониторинга, работами по техническому обслуживанию пути и др.;

– выявлять места опасных для железнодорожного движения природных и техногенных явлений и объектов на территориях, примыкающих к железнодорожному пути, в частности, вновь образовавшиеся объекты.

Большие возможности выполнения этих условий при анализе объектов инфраструктуры открываются при одновременном использовании изображений и трехмерных облаков точек лазерного сканирования. Агрегирование данных лазерного сканирования и видео позволяет существенно увеличить объем информации, используемой для распознавания. Лазерное сканирование дает информацию о трехмерной структуре объектов, что является чрезвычайно важным при распознавании, в то время как видео позволяет получать такие сведения как цветовая гамма объектов, текстура, наличие на них графической информации в виде рисунков, надписей, иной текстовой информации и пр. Лазерное сканирование и фотосъемка достаточно успешно используются совместно и в других приложениях, например, при трехмерной реконструкции зданий и построении трехмерной модели местности.

Данные лазерного сканирования все шире применяются во многих инженерных российских и зарубежных проектах, связанных с мониторингом железнодорожной инфраструктуры. Технические параметры лазерных систем позволяют сейчас осуществлять сканирование не только со стационарных установок на земле, но также и с движущихся платформ [1-6]. В конце 2011 года российский научно-исследовательский институт «НИПИСтройТЭК» выполнил для ОАО «РЖД» работы по лазерному сканированию по трем направлениям Московской железной дороги (Рязанская, Смоленская и Брянская) и по одному направлению Октябрьской железной дороги общей протяженностью 1400 км [7]. В результате была собрана трехмерная информация об объектах в зоне видимости сканирующей системы. При скорости съемки 60 километров в час удалось достичь точности в несколько сантиметров и плотности – до 3000 точек на квадратный метр. Использовалась сканирующая система, установленная на крыше железнодорожной автомотрисы.

Совместно со сканированием велась фотосъемка территории объекта четырьмя широкоугольными камерами с частотой до 20 кадров в секунду. Данные с фотокамер позволяют значительно улучшить восприятие объектов, анализировать их характеристики, присваивать истинные цвета точкам, а объектам - необходимые атрибуты.

Предполагается, что на основе этих данных будут решаться следующие задачи:

– создание пространственных данных железнодорожной инфраструктуры;

– построение продольных и поперечных профилей;

– анализ параметров объектов инфраструктуры и сопоставление их с нормативами;

– выявление участков на железнодорожном полотне и балластной призме, требующих ремонта или реконструкции;

– определение габаритов объектов и вычисление критических значений (провис проводов контактной сети, деформация объектов инфраструктуры, обвалы земляного полотна);

– инвентаризация объектов железнодорожной инфраструктуры.

Точность совмещения данных разных видов съемки с данными мобильного сканирования составила: для аэрофотосъемки и воздушного лазерного сканирования – 5 сантиметров, для наземного лазерного сканирования – 3 см.

При использовании лазерных данных одной из задач является преобразование данных лазерного сканирования к виду, удобному для дальнейшей обработки. Учитывая, что изначально лазерные точки естественно рассматривать в полярной системе координат, целесообразно перевести их в декартову прямоугольную систему, поскольку в этом случае облегчается агрегирование лазерной и видео информации. Это можно сделать с помощью несложных геометрических преобразований.

При этом необходимо учесть, что в тех случаях, когда рассматривается мобильная видео и лазерная система, установленная на движущемся носителе (вагоне, автомотрисе), то она подвержена колебаниям, возникающим при движении – линейным колебаниям вдоль всех осей некоторой системы координат и вращательным колебаниям вокруг этих осей. Это обусловлено, с одной стороны, неравномерностью движения вагона, а с другой, неровностями железнодорожного пути. Данные обстоятельства вносят существенные погрешности в данные лазерного сканирования.

Компенсировать подобные погрешности можно разными способами. Одно из решений заключается в том, чтобы установить лазер на специальной гиростабилизирующей платформе, компенсирующей указанные колебания. Однако разработка и создание такой платформы ввиду высокой частоты линейных и угловых колебаний является непростой и дорогостоящей технической задачей. Приобретение известных гиростабилизирущих платформ, отвечающих заданным требованиям, также требует значительных затрат.

Другой путь состоит в том, чтобы постоянно регистрировать параметры колебаний носителя лазера и на основе этих данных вычислять реальное положение сканера в каждый момент времени. Иными словами, можно в каждой точке пути вносить поправки в положение и ориентацию лазеров и видеокамер. Зная их реальное положение, можно формально внести необходимые поправки в вычисления и благодаря этому более точно рассчитать координаты точек лазерного отражения и положение видеокадров в декартовой системе. Данный путь представляется более предпочтительным.

Вычисление указанных поправок можно осуществить по данным акселерометров или датчиков угловых скоростей, установленных на лазере. В настоящее время имеются дешевые и компактные акселерометры, которые с высокой точностью измеряют линейные и угловые ускорения относительно всех осей координат. Поэтому в данном подходе предполагается, что система лазерных дальномеров сопряжена с тремя линейными и угловыми акселерометрами, ориентированными взаимно перпендикулярно в соответствии с системой прямоугольных координат, привязанной к железнодорожному пути.

Указанные выше преобразования позволят в целом сформировать достаточно точную первоначальную модель (карту глубин) окружения железнодорожного пути в полосе отвода.

Ниже выводятся основные формулы, которые позволяют вычислить поправки, уточняющие положение лазера при случайных колебаниях движущегося вагона.

Исходные предположения

Определим вначале координатные системы, в которых будут фиксироваться и обрабатываться данные лазерных измерений.

Рассмотрим горизонтальную плоскость, которая является касательной к колесным парам в их нижней точке. В качестве начала координат возьмем некоторую точку , которая лежит в этой плоскости в точности посередине между колесами. Ось  также расположена в этой плоскости и параллельна продольной оси вагона (оси пути - продольной линии, проходящей посередине между рельсовыми нитками колеи). Ось  лежит в этой же плоскости и перпендикулярна оси . Наконец, ось  направлена вверх и перпендикулярна данной плоскости. При этом ось  направлена в сторону движения вагона, несущего лазер, а направляющие векторы осей координат образуют правую тройку (см. рис. 1).



Рис. 1. Система координат.

Будем считать, что сканер закреплен на вершине измерительного вагона так, что приемный элемент лазера находится в плоскости  (рис. 1). Тогда в данной системе координат можно указать координаты лазерного приемника - . В этом случае, очевидно, ,  - высота подвеса лазера, а  можно интерпретировать как расстояние от лазера до середины вагона. Сканирование осуществляется в плоскости , т.е. луч сканера перемещается вверх и вниз, оставаясь в плоскости .

Данная система координат жестко «привязана» к железнодорожному вагону, несущему лазерный сканер, поэтому точка  начала координат при движении вагона будет перемещаться вместе с ним. Соответственно, система координат будет менять свое положение по отношению к железнодорожному пути в соответствии с изгибами пути и собственно движением вагона. Можно сказать, что системы координат, построенные в разных точках железнодорожного пути, могут быть совмещены путем переноса и некоторого вращения в пространстве, обусловленного изменением направления и ориентации пути. Данные изменения системы координат носят регулярный характер, и практически не влияют на результаты измерений, так как сканируемые объекты железнодорожной инфраструктуры находятся в системе координат, связанной с железнодорожным путем.

Реальные (и значительные) погрешности в результаты измерений вносят линейные и угловые колебания вагона (несущего лазерный сканер), относительно железнодорожного пути. Эти колебания вызываются многими причинами - неравномерностью тяги, неровностями, наклонами и дефектами железнодорожного полотна, аэродинамическими факторами и пр. Данные колебания вызывают случайные отклонения лазерного луча, и измерения теряют достоверность. При этом величина ошибки измерения в общем случае растет с ростом расстояния до сканируемого объекта, а в тех случаях, когда луч в результате случайного колебания выходит за границы объекта, то получается попросту ложное измерение.

Будем считать, что для учета и вычисления поправок, компенсирующих указанные колебания, система лазерного сканирования оборудована шестью акселерометрами, измеряющими действующие на сканер три линейных и три угловых ускорения относительно введенных осей координат. Учитывая небольшие габариты акселерометров, можно считать, что они размещены в непосредственной близости к приемной части лазера. Пусть с момента начала движения вагона каждый из шести акселерометров формирует кривую, характеризующую изменение с течением времени соответствующего ускорения вагона. Проинтегрировав дважды функцию, задаваемую этой кривой, получим закон изменения соответствующего параметра. При этом возникающие при интегрировании две произвольные постоянные можно считать равными нулю, так как до момента начала движения в системе координат, связанной с лазером, как значения параметров угловых и линейных смещений, так и инерциальная скорость их изменения, равны нулю. Поэтому можно считать, что имеется шесть функций, характеризующих изменение во времени значений трех линейных и трех угловых смещений лазера.

Введем необходимые обозначения. Пусть , ,  - функции линейных смещений лазера вдоль осей ,  и  соответственно, которые формируются с помощью линейных акселерометров; , ,  - функции угловых смещений лазера вокруг осей ,  и , получаемые по данным угловых акселерометров. Понятно, что линейные смещения приводят к такому изменению положения лазера, при котором его ось излучения не меняет своего направления, а изменяются только координаты точки излучения. В то же время, угловые смещения характеризуют изменения именно направления излучения.

Будем считать, что линейные смещения имеют положительный знак, если они происходят в направлении соответствующей оси координат, и отрицательный - в противном случае. Для угловых смещений положительными будем считать те, которые происходят против часовой стрелки, если смотреть с конца соответствующей координатной оси, и отрицательными, если они осуществляются по часовой стрелке.

При движении вагона построенная система координат перемещается вместе с вагоном относительно железнодорожного пути, так что можно считать, что построенная система перемещается относительно неподвижной системы координат, связанной с железнодорожной веткой. В качестве неподвижной системы можно использовать *линейные железнодорожные координаты*, в которой координаты всех объектов в полосе отвода «привязаны» к железнодорожному пути. Таким образом, положение подвижной системы (без учета случайных колебаний) полностью определяется законом движения вагона вдоль пути, который может быть задан функцией изменения во времени положения точки  начала координат.

Из данных предположений следует, что координата  любой точки, связанной с неподвижной системой координат, зависит от времени, т.е. . Таким образом, в момент времени  координаты лазерного сканера в неподвижной системе координат равны . Однако определение направления луча сканирования в каждый момент времени по известным углам поворота, которые задаются вектором , представляет собой более сложную задачу, решение которой рассматривается в следующем разделе.

Отметим в заключение, что при агрегировании лазерной и видео информации в дальнейшем для простоты будем считать, что лазерный сканер совмещен с видеокамерой так, что оптическая ось видеокамеры находится в плоскости, в которой осуществляется сканирование.

Вычисление положения лазера при угловых смещениях

Рассмотрим задачу вычисления истинного положения лазера, когда одновременно происходят его угловые смещения вокруг осей координат неподвижной системы, связанной с вагоном.

Предположим, что направление излучения лазерного луча в неподвижной системе координат задается вектором  единичной длины, . В этом случае из сделанных выше предположений следует, что  и . Однако в результате возникающих при движении колебаний координаты вектора  будут меняться во времени, поэтому направляющий вектор следует рассматривать как зависящую от времени векторную функцию единичной длины, .

Рассмотрим матрицы ,  и  поворота вокруг координатных осей ,  и  на соответствующие углы , , :

, , .

Зафиксируем некоторую последовательность координатных осей и произведем последовательное в соответствии с выбранным порядком вращение вектора  вокруг указанных осей. Это может быть описано последовательным умножением вектора  на матрицы поворота, например, . В данном случае сначала выполняется поворот вокруг оси , затем вокруг  и, наконец, вокруг оси . Однако результирующее положение точки будет зависеть от последовательности выполняемых поворотов, т.е., например, . Таким образом, поскольку существует шесть различных последовательностей, в которых могут быть осуществлены повороты вокруг осей, то в общем случае будет шесть различных результирующих положений точки . Формально это является следствием некоммутативности матричного умножения и отражает не очень простые законы движения точки в . В реальности наблюдается одно вполне определенное финальное положение точки в результате вращения вокруг осей.

Вместе с тем, уклонение результирующих векторов, полученных при разных последовательностях вращений, друг от друга становится меньше с уменьшением величины углов поворота , , . Поэтому можно предполагать, что если повороты вокруг осей производить путем последовательных поворотов на небольшие углы, то различия в результирующих положениях точки, задаваемой вектором , будут невелики, а возможно, все эти положения сойдутся в одну точку, общую для всех возможных последовательностей применения матриц поворота. С обоснованностью такого предположения можно согласиться, если провести соответствующие вычислительные эксперименты. Ниже мы покажем, что указанная сходимость действительно имеет место и найдем формулы для «прямого» вычисления этого предельного положения.

Представим поворот на углы , ,  в виде последовательности небольших поворотов. Для этого зафиксируем некоторое достаточно большое целое число  и рассмотрим углы , , . С увеличением  эти углы становятся малыми, и мы можем применить приближенные формулы , . При  эти приближенные равенства переходят в точные. Заметим, что ошибка в данных приближенных равенствах пропорциональна квадрату малой величины , поэтому эти формулы можно назвать формулами *первого* приближения.

С учетом приближенных формул матрицы поворота можно переписать следующим образом:

, , ,

где  - единичная матрица размера . Будем называть эти матрицы элементарными матрицами поворота первого приближения. Рассмотрим последовательные вращения, описываемые этими матрицами:

.

Покажем, что для модели первого приближения матрицами , ,  и  можно пренебречь, так как их элементы имеют более высокий порядок малости по сравнению с элементами матриц ,  и . Действительно,

.

Аналогично и для остальных произведений матриц. Поэтому для модели первого приближения получаем , причем из аддитивного характера правой части следует, в частности, что в условиях первого приближения порядок при перемножении матриц элементарных поворотов не имеет значения.

Поскольку мы представляем поворот на заданные углы , ,  в виде последовательности  элементарных поворотов на углы , , , то результирующее положение вектора  определяется формулой:

.

С ростом  получаем последовательность . Покажем, что эта последовательность имеет предел, который собственно и будет решением задачи вычисления положения вектора  при заданных поворотах.

Для отыскания предела найдем собственные значения , ,  и соответствующие собственные векторы , ,  матрицы . С помощью непосредственных вычислений получаем:

, , ,

где . Соответствующие собственные векторы имеют вид:

, , .

Поскольку все собственные значения различны, то матрица  является матрицей простой структуры, а значит все ее собственные векторы линейно независимы. Но тогда в базисе из собственных векторов эта матрица будет иметь диагональный вид с собственными значениями по диагонали. Иными словами, справедливо представление , где  - матрица, составленная из собственных векторов , , , и . Тогда  и, следовательно, принимая во внимание, что  и  от  не зависят, получаем:

.

Рассмотрим предел матрицы :

.

Вычисляя пределы диагональных элементов, находим: . Таким образом, , где

,

.

Таким образом, для вычисления матрицы  результирующего преобразования необходимо перемножить найденные матрицы. После вычислений получаем окончательно:

.

Данной матрице можно придать более удобную форму в виде разложения по единичной, симметрической и кососимметрической матрицам:



или, если ввести вектор , то

.

Можно дать еще более простую запись матрицы . Для этого обозначим . Тогда с помощью простых преобразований можно показать, что матрица  представляется в виде разложения по степеням матрицы :

.

В дальнейшем будем пользоваться именно такой записью матрицы . Таким образом, окончательно получаем:

. (1)

Заметим, что аналогичную формулу (возможно, в некоторой эквивалентной записи) можно получить, используя технику работы с кватернионами.

Заметим, что непосредственными вычислениями легко проверить, что ,т.е.  является собственным вектором матрицы , отвечающим собственному значению 1. Вектор можно рассматривать как направляющий вектор оси, вокруг которой вращаются точки пространства. При этом точки, лежащие на самой оси, естественно остаются при таком вращении неподвижными. Покажем, что **** имеет смысл угла, на который поворачивается произвольная точка пространства вокруг данной неподвижной оси при умножении на матрицу .



Обозначим искомый угол через . Пусть  - произвольный вектор пространства, а . При этом . Тогда, как можно видеть из рис. 2,  - это угол между векторами  и , которые ортогональны вектору . При этом, очевидно, , . Тогда . Непосредственно можно убедиться, что . Поскольку  , то

Рис. 2. К определению угла поворота.



.

Найдем теперь  и . Непосредственно вычисляем: , . В силу равенства углов между векторами, получающимися в результате поворота вокруг оси , имеет место равенство . Поэтому, учитывая, что , заключаем, что . Таким образом, , откуда и следует доказательство.

Свойства матриц  и 

Матрицы  и  обладают рядом хороших свойств. Заметим вначале, что матрицы  и  строятся однозначно по вектору . Чтобы подчеркнуть этот факт и отличать матрицы, построенные по разным векторам, будем писать  и  соответственно.

Свойства матрицы .

1) .

2) .

3) , .

4) Для любого вектора , , имеет место , т.е. .

5) Если  и  не коллинеарны, то  для некоторого 

6) .

7) .

8) .

9) .

10) .

Свойства матрицы .

1) Матрица  - ортогональная, т.е. . Следовательно, .

2) В силу ортогональности матрица  является изометрией, т.е. сохраняющей расстояния. Это вполне ожидаемый результат, поскольку при изменении углов радиус-векторы всех точек меняют лишь свое направление, двигаясь по воображаемой сфере, а следовательно, сохраняют расстояние до начала координат.

3) Транспонированная (и, соответственно, обратная) матрица получаются заменой знака перед в выражении для , т.е.

.

Это очевидно, поскольку  - кососимметрическая матрица, следовательно , а значит  - симметричная матрица.

4)  для любого , т.е. .

В дальнейшем потребуется вычислять действие матрицы  на векторы угловых перемещений. Поэтому для упрощения необходимых преобразований приведем результаты таких вычислений:

5) , ,

6) ,

7) ,

8) ,

9) ,

10) ,

11) .

Нахождение эквивалентной оси вращения

Рассмотрим последовательное действие двух вращений, задаваемых векторами  и . Данные вращения описываются матрицами  и . Результирующее вращение, таким образом, может быть вычислено с помощью матрицы . Векторы  и  являются собственными векторами соответствующих матриц, отвечающими собственным значениям, равным 1. Иными словами, эти векторы задают ось вращения. Тогда, как известно, последовательность этих двух вращений может быть описана как одно вращение, но вокруг другой оси, задаваемой вектором , на некоторый угол. Найдем этот вектор .

Получить этот вектор можно, очевидно, решив относительно  уравнение . Однако это предполагает очень трудоемкие вычисления, связанные с предварительным перемножением матриц. Поэтому заметим, что данная задача в силу невырожденности матрицы  эквивалентна задаче  или . Учитывая, что выражение для  очень просто получается из  (см. свойство 2) матрицы ), данная задача существенно проще.

Заметим, что если векторы  и  не коллинеарны, то система векторов  образует базис в . Поэтому будем искать неизвестный вектор  в виде с неизвестными пока коэффициентами ,  и , т.е.



.

Пользуясь приведенными выше свойствами матриц  и , группируя коэффициенты при базисных векторах и приравнивая эти коэффициенты нулю, получаем систему линейных уравнений для определения ,  и :



При этом, как и следовало ожидать, третье уравнение оказывается линейной комбинацией первых двух и может быть отброшено, т.е.  является некоторой свободной скалярной функцией. В результате, получаем следующее решение системы:

, , .

Однако, как будет показано далее, функция  полностью определяется условием нормирования вектора  и может быть вычислена по известным векторам , ,  и , т.е. . Таким образом, выражение для эквивалентной оси вращения имеет вид:

.

Найдем . Для этого заметим, что



.

После преобразований получаем

,

откуда

.

С другой стороны,  равно углу, на который поворачивается вектор  до совмещения с вектором . Очевидно, это угол между векторами  и  (рис. 3). Тогда . Непосредственными вычислениями можно показать, что



,

где  - орт вектора . Из предшествующих вычислений следует, что

Рис. 3. Эквивалентный угол поворота.

.

Таким образом, получаем окончательно

.

Дифференциальное описание движения точки  
при одновременном вращении вокруг осей

Дадим дифференциальное описание траектории движения точки, когда происходит одновременное и непрерывное вращение этой точки вокруг осей ,  и . Пусть  - радиус-вектор рассматриваемой точки в момент времени . Будем считать, что угловые смещения точки вокруг осей координат в момент времени  описываются вектором , причем будем предполагать, что векторная функция  является непрерывной на рассматриваемом отрезке времени. Тогда положение точки через небольшой промежуток времени  будет определяться вектором , где  - вектор приращения углов поворота. Отсюда получаем

.

Рассмотрим предел в правой части. Учитывая выражение для , получаем:



,

где  - мгновенная длина вектора  приращений угловых скоростей. Вычислим получившиеся пределы.

Вычислим вначале пределы коэффициентов. В силу непрерывности  имеем  и, следовательно, . Поэтому . Аналогично получаем .

Для матричных пределов получаем соответственно:

,

.

С учетом найденных значений пределов получаем:

.

Таким образом, . Это однородная система обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, которая имеет следующий явный вид:

 (2)

Легко заметить, что , что в свою очередь эквивалентно равенству . Отсюда сразу получаем , где  - неотрицательная константа. Нетрудно видеть, что , где  - длина вектора . Это вполне понятно, поскольку точка под воздействием угловых поворотов может перемещаться только по сфере, радиус которой равен длине ее радиус-вектора . Таким образом, решение данной системы лежит на сфере радиуса .

Данная интегрируемая комбинация позволяет понизить на единицу порядок системы дифференциальных уравнений, однако при этом система уравнений уже не будет линейной. Действительно, из полученного соотношения  находим . Подставляя это выражение в первые два уравнения, получаем:



Заметим также, что из (2) следует, что . Это означает, что в каждый момент времени вектор скорости перемещения точки ортогонален вектору угловых скоростей. В частности, если , то , и, значит, траектория перемещающейся точки лежит в плоскости, а с учетом условия , представляет собой, следовательно, окружность.

В общем случае решение системы (2) с помощью соответствующей подстановки [8] сводится к решению двух независимых уравнений Риккати общего вида .

Рассмотрим важный частный случай, когда вращения осуществляются равномерно и одновременно вокруг каждой оси, т.е. , , , , . Тогда , ,  и система (2) становится однородной системой дифференциальных уравнений с постоянными с постоянными коэффициентами:

 (3)

Найдем решение данной системы. Собственные значения матрицы данной системы равны: , , . Соответствующие собственные векторы:

, , .

Найдем вещественную фундаментальную систему решений:

.

Таким образом, общее решение системы имеет вид: , где , ,  - произвольные постоянные, которые можно найти из начальных условий. Действительно, обозначим , тогда последнее равенство, выражающее общее решение системы (3), можно записать в виде:

.

Для отыскания коэффициентов предположим, что в начальный момент времени  положение точки задается радиус-вектором . Тогда, учитывая невырожденность матрицы  при любом , из последнего выражения находим, что , и, таким образом, .

Если в последнем выражении перейти к координатной записи и проделать необходимые (достаточно громоздкие) преобразования, то в результате получим следующее выражение:

, (4)

где  и  - матрицы, введенные ранее.

Заметим, что найденное выражение при  совпадает с выражением (1) для результирующего преобразования, а при произвольном  описывает положение радиус-вектора  в момент времени . Отсюда следует важный вывод: формула (1) для результирующего преобразования справедлива только в предположении, что повороты вокруг осей ,  и  выполнялись одновременно и равномерно, т.е. с постоянной скоростью, возможно, своей для каждой из осей. В этом случае, как отмечалось выше, конец радиус-вектора перемещается по единичной (поскольку, напомним, по условию ) сфере перпендикулярно оси , т.е. движется по дуге окружности, проходящей через конец радиус-вектора .

В общем случае, когда законы вращения вокруг осей не являются линейными, траектория, описываемая радиус-вектором , представляет собой сложную линию, лежащую на поверхности единичной сферы. Для анализа такого движения необходимо пользоваться дифференциальным описанием движения (2). Формулы (1) или (4) можно использовать при приближенном описании траектории сложного движения путем ее линеаризации. При этом, очевидно, чем больше измельчение на рассматриваемом отрезке времени, тем точнее вычисляется положение вектора .

Литература

1. [Marmol](mailto:entice@agh.edu.pl) U., Mikrut S. Attempts at automatic detection of railway head edges from images and laser data, www.google.ru/?gws\_rd=cr#bav=on.2,or.r\_cp.r\_qf.&fp=f61c59ea9b42b530&new window=1&psj=1&q=Marmol+Mikrut.

2. Neubert M., Hecht R., Gedrange C., Trommler M., Herold H., Krüger T., Brimmer F. Extraction of railroad objects from very high resolution helicopterborne lidar and ortho-image data, GEOBIA - Pixels, Objects, Intelligence GEOgraphic Object Based Image Analysis for the 21st Century August 5-8, Calgary, Alberta, Canada, 2008.

3. Haasnoot H. Aerial survey of fix assets in the right of way, Proceedings FIG Working Week 2001, 6 -11 May 2001, Seoul, South-Korea, 2001.

4. Pyka K., Borowiec N., Poręba M., Słota M., Kundzierewicz T. Airborne laser scanning data for railway lines survey, PAK, 03, 2012, pp. 260-263.

5. Arastounia M., Automatic classification of object from lidar point clouds in a railway environment, MSc, Thesis, University of Twenty, 2012.

6. Beger R., Gedrange C., Hecht R., Neubert M. Data fusion of extremely high resolution aerial imagery and LIDAR data for automated railroad centre line reconstruction, ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing 66 (6, Supplement), 2011, pp. 40-51.

7. [www.nipistroytek.ru](http://www.nipistroytek.ru/)

8. Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 5 изд. - М.: Наука, 1976.